

LISTA 2

ÁLGEBRA LINEAR

PROF. GUILHERME AUGUSTO PIANEZZER

ESPAÇOS VETORIAIS

1. Considere $V = \{(x, 2x, 3x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.
 - A. Mostre que V é um espaço vetorial real.
 - B. Identifique o vetor nulo e o oposto de $(x, 2x, 3x)$ em V .
2. Em $\mathbb{R}^2$, mantenha a adição usual e defina $\lambda \odot (x, y) = (\lambda^2 x, \lambda^2 y)$. Essas operações tornam $\mathbb{R}^2$ um espaço vetorial? Justifique com um axioma e um contraexemplo.
3. Seja $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M(2,2)$. Demonstre que V é um espaço vetorial com as operações usuais. Determine o vetor nulo e o oposto de uma matriz genérica.

SUBESPAÇOS VETORIAIS

4. Verifique se $S = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$. Justifique por meio das condições de subespaço ou de um contraexemplo.
5. Classifique os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ como subespaços vetoriais ou não. Em cada caso, justifique:
 - A. $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 0\}$;
 - B. $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$.
6. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Determine quais são subespaços vetoriais, verificando o fechamento por adição e multiplicação por escalar:
 - A. $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x - y\}$;
 - B. $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z^2\}$.
7. Analise os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ a seguir e explique por que a homogeneidade das equações, isoladamente, não basta para garantir a condição de subespaço:
 - A. $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$;
 - B. $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
8. Verifique quais conjuntos são subespaços de $M(2,2)$ com as operações usuais. Justifique cada resposta:
 - A. $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;
 - B. $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$;
 - C. $S_3 = \{A \in M(2,2) : \det A \neq 0\}$.

COMBINAÇÃO LINEAR

9. Dados $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$, em $\mathbb{R}^3$, resolva:
 - A. Escreva $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v .
 - B. Determine k para que $(-8, 14, k)$ seja combinação linear de u e v .
 - C. Encontre uma condição entre a, b, c para que (a, b, c) pertença a $G(\{u, v\})$.
10. No espaço P_2 , considere $p_1(t) = t^2 - 2t + 1$, $p_2(t) = t + 2$ e $p_3(t) = 2t^2 - t$.
 - A. Escreva $p(t) = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2, p_3 .

- B. Verifique se p pode ser escrito apenas como combinação linear de p_1 e p_2 .
- C. Determine uma condição sobre a, b, c para que $at^2 + bt + c$ seja combinação linear de p_2 e p_3 .
11. Em $M(2,2)$, sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determine escalares α, β, γ tais que $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \alpha A + \beta B + \gamma C$.
12. No espaço $\mathbb{R}^4$, escreva $u = (-1, 4, -4, 6)$ como combinação linear de $v_1 = (3, -3, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $v_3 = (1, -1, 0, 0)$, ou justifique a impossibilidade.

ESPAÇO GERADO

13. Determine o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por cada conjunto e identifique geometricamente se o resultado é uma reta, um plano ou todo o espaço:
- A. $A_1 = \{(2, -1, 3)\}$;
 B. $A_2 = \{(-1, 3, 2), (2, -2, 1)\}$;
 C. $A_3 = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.
14. Seja $A = \{(-1, 3, -1), (1, -2, 4)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
- A. Descreva o espaço gerado $G(A)$ por meio de uma equação cartesiana.
 B. Determine k para que $(5, k, 11) \in G(A)$.
15. Em P_2 , descreva o subespaço gerado em cada caso. Expresse as condições sobre os coeficientes de um polinômio genérico e identifique se o conjunto gera todo P_2 :
- A. $A_1 = \{2t + 2, -t^2 + t + 3, t^2 + 2t\}$;
 B. $A_2 = \{t^2, t^2 + t\}$;
 C. $A_3 = \{1, t, t^2\}$.
16. No espaço $\mathbb{R}^4$, seja $W = G(\{(2, -1, 3, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0)\})$.
- A. Verifique se $(-1, -3, 2, 0) \in W$.
 B. Descreva W por equações lineares e explique como o sistema associado decide a pertinência de um vetor a W .

INDEPENDÊNCIA LINEAR

17. Classifique os conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^2$ em linearmente independentes (LI) ou linearmente dependentes (LD). Justifique:
- A. $A = \{(1, 3), (2, 6)\}$;
 B. $B = \{(2, -1), (3, 5)\}$;
 C. $C = \{(1, 0), (-1, 1), (3, 5)\}$.
18. Classifique os seguintes conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^3$ em LI ou LD, explicitando uma relação de dependência quando existir:
- A. $A = \{(2, -1, 0), (-1, 3, 0), (3, 5, 0)\}$;
 B. $B = \{(1, 2, -1), (2, 4, -2), (1, 3, 0)\}$;
 C. $C = \{(1, -1, -2), (2, 1, 1), (-1, 0, 3)\}$;
 D. $D = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 2), (3, -1, 2)\}$.
19. No espaço P_2 , estude a independência linear dos seguintes conjuntos de polinômios e justifique por meio dos coeficientes:
- A. $A = \{2 + t - t^2, -4 - t + 4t^2, t + 2t^2\}$;
 B. $B = \{1 - t + 2t^2, t - t^2, t^2\}$;

C. $C = \{t^2 - t + 1, t^2 + 2t\}$.

20. Determine todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais o conjunto $\{(-1, 0, 2), (1, 1, 1), (k, -2, 0)\}$ é linearmente independente. Relacione o resultado ao determinante da matriz que tem esses vetores como colunas.

BASE

21. Verifique quais conjuntos são bases de $\mathbb{R}^2$, justificando a condição de independência linear e de geração:
- A. $A = \{(1, 2), (-1, 3)\}$;
 B. $B = \{(3, -6), (-4, 8)\}$;
 C. $C = \{(0, 0), (2, 3)\}$;
 D. $D = \{(3, -1), (2, 3)\}$.
22. Determine quais dos conjuntos abaixo formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Explique se a falha decorre de dependência linear ou da quantidade de vetores:
- A. $A = \{(1, 1, -1), (2, -1, 0), (3, 2, 0)\}$;
 B. $B = \{(1, 0, 1), (0, -1, 2), (-2, 1, -4)\}$;
 C. $C = \{(2, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$;
 D. $D = \{(1, 2, 3), (4, 1, 2)\}$.
23. Considere o espaço P_2 dos polinômios de grau menor ou igual a 2. Verifique quais conjuntos formam uma base de P_2 :
- A. $A = \{1, t, t^2\}$;
 B. $B = \{1 + t + t^2, t + t^2, t^2\}$;
 C. $C = \{1 + t, t - t^2, 1 + 2t - t^2\}$.
24. Mostre que $\beta = \{1 + 2t - 3t^2, 1 - 3t + 2t^2, 2 - t + 5t^2\}$ é uma base de P_2 . Em seguida, determine as coordenadas de $p(t) = -2 - 9t - 13t^2$ em relação à base β .

DIMENSÃO

25. Determine uma base e a dimensão de cada subespaço de $\mathbb{R}^3$:
- A. $S_1 = \{(x, y, z): y = 3x\}$;
 B. $S_2 = \{(x, y, z): y = 5x, z = 0\}$;
 C. $S_3 = \{(x, y, z): 2x - y + 3z = 0\}$;
 D. $S_4 = \{(x, y, z): z = 0\}$.
26. Em $M(2, 2)$, determine uma base e a dimensão dos conjuntos definidos abaixo:
- A. $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b = a + c, d = c \right\}$;
 B. $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : c = a - 3b, d = 0 \right\}$.
27. Seja $W = G(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}) \subseteq \mathbb{R}^4$, em que $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (-2, 2, 2, 1)$, $v_3 = (-1, 1, 2, 1)$ e $v_4 = (0, 0, 4, 2)$. Extraia uma base de W , determine $\dim W$ e indique quais vetores são redundantes no conjunto gerador.

MUDANÇA DE BASE

28. Para $v = (6, 2) \in \mathbb{R}^2$, considere as bases $\alpha = \{(3, 0), (0, 2)\}$, $\beta = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $\gamma = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\delta = \{(0, 1), (1, 0)\}$.
- A. Determine $[v]_\alpha$, $[v]_\beta$, $[v]_\gamma$ e $[v]_\delta$.

B. Obtenha a matriz de mudança de coordenadas da base α para a base β e utilize-a para verificar as coordenadas encontradas.

29. Em $\mathbb{R}^2$, sejam $A = \{(2, -1), (-1, 1)\}$ e $B = \{(1, 0), (2, 1)\}$, duas bases ordenadas.

A. Calcule a matriz de mudança de base de A para B .

B. Determine sua inversa e interprete-a como matriz de mudança de base de B para A .

C. Sabendo que $[v]_A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, determine $[v]_B$ e as coordenadas usuais de v .

30. Considere $B = \{(1, 0, -1), (1, 2, 1), (0, -1, 0)\}$ e a base canônica $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

A. Mostre que B é uma base de $\mathbb{R}^3$.

B. Determine a matriz de mudança de coordenadas de B para E e sua inversa.

C. Calcule $[v]_B$ para $v = (2, -1, 3)$, utilizando a matriz adequada.